Commentaires sur un résultat d'Olivier Frécon

Bruno Poizat, Frank Olaf Wagner

COMMENTAIRES SUR UN RÉSULTAT D'OLIVIER FRECON

BRUNO POIZAT & FRANK O. WAGNER

Résumé. Il n'y a pas de groupe malsain de rang $2n + 1$ avec un borel abélien de rang n. En particulier, le théorème de Frécon en découle : il n'y a pas de mauvais groupe de rang 3.

1. Introduction

Dans un preprint récent, Olivier Frécon a donné une réponse négative à la question de l'existence d'un mauvais groupe de rang de Morley 3. Sa démonstration fabrique de manière combinatoire et inattendue un ensemble X (qualifié ici *de Frécon*) qui fournit un automorphisme involutif du mauvais groupe, ce qui mène à une contradiction. Nous analysons ici sa démonstration et la généralisons aux mauvais groupes de rang $2n + 1$ avec un borel abélien de rang n.
Notation. Comme d'habitude, on note $g^h = h^{-1}gh$ et $[g, h] = g^{-1}h^{-1}gh$.

2. Groupes malsains et mauvais groupes

Définition 2.1. Un groupe *malsain* est un groupe connexe G de rang de Morley fini avec un sous-groupe définissable propre B, dont on appellera *borels* les conjugués, vérifiant les deux choses suivantes :

(1) B est *malnormal*, c'est-à-dire que $B \cap B^a = \{1\}$ si $a \notin B$;

(2) G est la réunion de ses borels.

En particulier, B est autonormalisant et genereux dans G ; comme G n'a pas d'involution (lemme 3.3), son existence contredirait la Conjecture d'Algébricité. On aimerait bien montrer qu'il n'existe pas de groupe malsain.

Lemme 2.2. *Soit G un groupe malsain. Alors ses borels sont infinis et connexes, et tout sous-groupe fini de G est contenu dans un borel. De plus, G est sans involution.*

Date: 29 septembre 2016.
2000 *Mathematics Subject Classification.* 03C45.
Partially supported by ANR-13-BS01-0006 ValCoMo.

Démonstration. Considérons $a \neq 1$ dans un borel B. Si $g \in G$ et $a^g \in B$, alors $a^g \in B \cap B^g$, d'où $B = B^g$ et $g \in N_G(B) = B$. En particulier $C_G(a) \leq B$. Si les borels sont finis, tout élément non-trivial a un centralisateur fini et une classe de conjugaison générique dans G ; comme G est connexe, tous les éléments non-triviaux de G sont conjugués, ce qui est impossible pour un groupe stable.

Les borels sont donc infinis ; s'ils n'étaient pas connexes, on obtiendrait deux ensembles génériques disjoints : la réunion des conjugués de B^0, et la réunion des conjugués de $B \setminus B^0$.

Soit F un sous-groupe fini non-trivial de G., et $H_1,\ldots,H_n$ les intersections non-triviales de F avec les borels de G. Alors les H_i sont autonormalisants dans F. Si H_1 est strictement inclus dans G, le nombre n de points de la réunion des F-conjugués de H_1 est

$$n = |F : H_1| \cdot (|H_1| - 1) + 1 = |F| - |F : H_1| + 1.$$

Comme H_1 est d'indice au moins deux dans F, on a $n < |F|$ et il y a un H_i non-conjugué de H_1. D'autre côté, comme H_1 est d'indice au plus $|F|/2$, on a $n \geq 1 + |F|/2$ et il n'y a pas d'assez de place pour les conjugués de H_i. Ainsi $H_1 = F$, et F est contenu dans un seul borel.

Enfin, si i et j sont des involutions prises dans des borels différents, elles inversent toutes deux ij, et normalisent son borel, c'est-à-dire lui appartiennent, ce qui est absurde. □

Lemme 2.3. *Soit G un groupe malsain. Alors tout sous-groupe connexe définissable H qui n'est pas inclus dans un borel est encore malsain, et ses borels sont les traces des borels de G dans H.*

Démonstration. Soient $B_0,\ldots,B_i,\ldots$ les traces non-triviales dans H des borels de G. Notons d'abord que chaque B_i est autonormalisant dans H. Comme B_0 est en plus disjoint de ses conjugués dans H en dehors de 1, la réunion de ces conjugués est une partie générique de H. Comme H est connexe, tous les B_i sont conjugués dans H, et H est malsain. □

Lemme 2.4. *Soit G un groupe malsain avec borel B, et N un sous-groupe définissable normal non-trivial de G. Alors $G = NB$.*

Démonstration. Si N était fini, il serait central et normalisait tous les borels, ce qui est absurde. Donc N est infini, et on peut supposer N connexe et $H = N \cap B$ non-trivial. Alors N est un groupe malsain avec borel H. Soit $g \in G$. Alors H^g est un borel de N, et il y a $n \in N$ avec $H^n = H^g$, d'où $gn^{-1} \in N_G(B) = B$. □

Lemme 2.5. *Soit G un groupe malsain avec borel B, et H un sous-groupe définissable de G contenant B. Alors H est connexe, et G est aussi malsain de borel H.*

Démonstration. Supposons d'abord H connexe. Comme H contient B et les conjugués de B recouvrent G, les conjugués de H recouvrent G.

Soit H^g un conjugué de H avec intersection $H \cap H^g$ non-triviale. Soit $1 \neq x \in H \cap H^g$; comme H est malsain de borel B, on peut supposer $x \in B$. Alors B est contenu dans H et dans H^g. Ainsi B et B^g sont deux borels de H^g, et il y a $h \in H^g$ avec $B^h = B^g$, d'où $gh^{-1} \in N_G(B) = B \leq H^g$. Ainsi $g \in H^g$ et $H = H^g$, et H est malnormal.

Si H n'est pas connexe, alors H^0 contient encore B par connexité de ce dernier. Alors G est malsain de borel H^0. En particulier H^0 est malnormal, et $H \leq N_G(H^0) = H^0$. Ainsi H est connexe. $\square$

Lemme 2.6. *Soit G un groupe de rang de Morley fini sans involutions. Alors chaque élément g de G a une unique racine carrée, qui est contenu dans tout sous-groupe définissable contenant g. De plus, un élémént non-trivial n'est pas conjugué à son inverse.*

Démonstration. Soient $g \neq 1$ un élément de G, et A le plus petit sous-groupe définissable le contenant. Alors A est commutatif, et comme il n'a pas d'involutions, l'homomorphisme de A dans A qui à x associe x^2 est injectif, et donc bijectif puisqu'il conserve rang et degré de Morley. Ainsi tout élément $a \in A$ possède une unique racine carrée $u \in A$; si v est une autre racine carrée de a, elle commute avec a, normalise A, et commute avec l'unique racine carrée de a dans A, soit u. Donc $(uv^{-1})^2 = aa^{-1} = 1$ et $u = v$ puisqu'il n'y a pas d'involutions.

Enfin, si $g^h = g^{-1}$, alors $h^2 \in C_G(g)$, et donc $h \in C_G(g)$, puisque dans un groupe de rang de Morley fini les involutions se relèvent. Ainsi $g = g^{-1}$ et $g = 1$. $\square$

Lemme 2.7. *Soit G un groupe de rang de Morley fini sans involutions, et σ un automorphisme involutif de G. Soit $F = \{g \in G : \sigma(g) = g\}$ et $I = \{g \in G : \sigma(g) = g^{-1}\}$. Alors $G = F \cdot I = I \cdot F$, avec décomposition unique ; de plus, un point non-trivial de F n'a pas de conjugué dans I.*

Démonstration. Soit $g \in G$ et considérons $h = g^{-1}\sigma(g)$. Alors $\sigma(h) = h^{-1}$ et $h \in I$. Soit ℓ la racine carrée unique de h. Alors ℓ^{-1} est la racine carrée unique de $h^{-1} = \sigma(h)$, d'où $\sigma(\ell) = \ell^{-1}$ et $\ell \in I$. Ainsi

$$\sigma(g\ell) = \sigma(g)\sigma(\ell) = gg^{-1}\sigma(g)\ell^{-1} = gh\ell^{-1} = g\ell^2\ell^{-1} = g\ell$$

et $g\ell \in F$. Donc $g \in F \cdot I$ et $G = F \cdot I$. En prenant des inverses, on obtient $G = I \cdot F$.

Si $g = if = i'f'$ avec $i, i' \in I$ et $f, f' \in F$, alors $i^{-1}i' = ff'^{-1} \in F$, et

$$i^{-1}i' = \sigma(i^{-1}i') = \sigma(i^{-1})\sigma(i) = ii'^{-1},$$

d'où $i'^2 = i^2$. Alors $i = i'$ et la décomposition est unique.

Enfin, soit $f \in F$ non-trivial, et $g \in G$ tel que $f^g \in I$. Alors $g = f'i$ pour un $i \in I$ et $f' \in F$, et $f^{f'} \in F$ est non-trivial. On peut donc supposer $g = i \in I$. Alors

$$i^{-1}fi = f^i = \sigma(f^i) = \sigma(i^{-1}fi) = ifi^{-1}$$

et $fi^2 = i^2f$. Donc $i^2 \in C_G(f)$; d'après le lemme 2.6 on a aussi $i \in C_G(f)$, et $f^i = f \in F \cap I = \{1\}$, une contradiction. $\square$

Remarque 2.8. Dans le lemme 2.7 on ne suppose pas que l'automorphisme involutif σ soit définissable.

La famille des borels d'un groupe malsain n'est pas a priori uniquement déterminée. On appelle un groupe malsain *canonique* si ses borels sont ses sous-groupes définissables connexes maximaux.

Lemme 2.9. *Soit G un groupe malsain. Un sous-groupe H définissable connexe de rang minimal qui n'est pas inclus dans un borel est malsain canonique.*

Démonstration. H est malsain d'après le lemme 2.3. Soit F un sous-groupe propre définissable de H. Si F est fini, il est dans un borel d'après le Lemme 2.2. S'il est infini, F^0 est dans un borel B par minimalité de H, et F normalise F^0, donc B, et $F \leq B$. $\square$

Proposition 2.10. *Un groupe malsain canonique G n'a pas d'automorphisme involutif non-trivial.*

Démonstration. Soit σ un automorphisme involutif de G. On pose $F = \mathrm{Fix}_G(\sigma)$ et $I = \{g \in G : \sigma(g) = g^{-1}\}$. Alors F^0 est contenu dans un borel B ; puisque B est malnormal, $F \leq B$. Comme $G = F \cdot I$, il y a un autre borel B' qui contient un élément i non-trivial de I. Alors $i^{-1} \in B' \cap \sigma(B')$ et $\sigma(B') = B'$. Ainsi σ est un automorphisme involutif de B', et $B' = (I \cap B') \cdot (F \cap B')$ d'après le lemme 2.7. Or, $B \cap F = \{1\}$, et $B' = I \cap B'$ est inversé par σ. Mais B se conjugue dans B', ce qui contredit le lemme 2.7. $\square$

Rappelons qu'un mauvais groupe est un groupe connexe non-nilpotent de rang de Morley fini dont tous les sous-groupes définissables connexes résolubles sont nilpotents. Le premier mauvais groupe est apparu dans un ancien article de Cherlin [2], comme un groupe simple de rang de Morley trois qui n'est pas de la forme $\mathrm{PSL}_2(K)$; c'est Nesin [5] qui a montré leur malignité au sens ci-dessus, c'est-à-dire l'absence d'involutions, en s'appuyant sur un théorème de Bachman. Il a été ensuite remarqué par Corredor [3] et Borovik-Poizat [1] que les mauvais groupes produisaient des groupes malsains canoniques. D'autres situations semblant paradoxales, comme un groupe minimal avec un groupe d'automorphismes définissable non-commutatif, ou bien un groupe définissablement linéaire contredisant la Conjecture d'Algébricité, en produisent également. Frécon [4] a réussi dernièrement à montrer que les mauvais groupes de rang de Morley trois n'existent pas ; les deux sections suivantes essaient de généraliser ses arguments.

3. Ensembles de Frécon

Soit G un groupe malsain, avec un borel B. Si $u \neq 1$ est dans G, on notera $B(u)$ l'unique borel contenant u.

Définition 3.1. On appelle *droite* un translaté bilatère de B, c'est-à-dire un ensemble de la forme $uBv = uv \cdot B^v$, qui est donc un translaté à gauche du borel B^v, qu'on appelle sa *direction.* L'ensemble des droites est noté Λ.

Pour une partie X de G on pose $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$. Alors l'ensemble des droites est préservé par translation à gauche et à droite, et aussi par inversion. Deux droites distinctes de même direction sont dites *parallèles* ; deux droites parallèles sont disjointes. Notons que le passage des translatés à gauche aux translatés à droite ne conserve pas le parallélisme.

Si deux droites distinctes se coupent, elles forment un translaté modulo l'intersection de leurs directions respectives, qui est réduite à l'élément neutre ; par conséquent, deux droites distinctes sont disjointes ou se coupent en un seul point. Si u et v sont deux points distincts, ils sont contenus tous les deux dans la droite $uB(u^{-1}v)$. C'est donc la seule droite qui passe par ces deux points ; on la note $\ell(u, v)$.

Nous dirons qu'une partie définissable de G est *convexe* si avec deux points elle contient toute la droite qui les joint. Un ensemble convexe fini est un point ; une droite, ou plus généralement un translaté d'un sous-groupe connexe contenant un borel est convexe. En fait, nous allons voir que ce sont les seuls ensembles convexes. Ce sera conséquence d'un théorème plus fort, concernant des ensembles plus généraux que les ensembles convexes, et qui — nous l'espérons — seront plus faciles à faire paraître dans les démonstrations d'inexistence.

Nous dirons qu'une droite ℓ est *génériquement incluse* dans l'ensemble définissable X si $RM(X \cap \ell) = RM(\ell)$; comme la dimension est définissable, les droites génériquement incluses dans X forment une famille définissable $\Lambda(X)$. Notons que si $RM(X) < RM(B)$ alors $\Lambda(X) = \emptyset$, et si $RM(X \triangle Y) < RM(B)$, alors $\Lambda(X) = \Lambda(Y)$.

Un ensemble définissable X est *quasi-convexe* si pour tout $x, y \in X$ distincts, $\ell(x, y)$ est génériquement incluse dans X. Un ensemble convexe est bien sur quasi-convexe.

Lemme 3.2. *Un ensemble X quasi-convexe est de degré de Morley* 1.

Démonstration. On considère
$$Z = \{(x, y, \ell) : x, y \in X \cap \ell,\ \ell \in \Lambda(X)\} \subseteq X^2 \times \Lambda(X).$$
Alors (x, y, ℓ) est générique dans Z si et seulement si x, y sont génériques indépendants dans X et $\ell = \ell(x, y)$, ou encore si ℓ est générique dans $\Lambda(X)$ et x, y sont génériques indépendants dans ℓ. Mais ℓ n'a qu'un seul type générique, ce qui implique que x et y on même type (fort) sur $\emptyset$, et $DM(X) = 1$. □

Lemme 3.3. $RM(\Lambda(X)) \leq 2\,RM(X) - 2\,RM(B)$.

Démonstration. On considère l'application $f : X^2 \to \Lambda$ donnée par $f(x, y) = \ell(x, y)$. Si $\ell \in \Lambda(X)$, alors le fibre sur ℓ est de rang $2\,RM(B)$; le lemme en découle par additivité du rang de Morley. □

Remarque 3.4. Pour $RM(X) \geq RM(B)$ le maximum est atteint
- — si X est quasi-convexe infini ;
- — pour $RM(X) = RM(B)$ si et seulement si X contient génériquement une droite ;
- — si X est générique dans G.

Plus généralement, le maximum est atteint si X contient génériquement un translaté C d'un sous-groupe définissable contenant un borel, puisque tous les points génériques d'une droite générique sont génériques dans C. Nous allons voir (théorème 3.12) que ce sont les seuls cas possibles.

Pour une partie $X \subseteq G$ et un élément $x \in G$ on notera
$$\Lambda_x(X) = \{\ell \in \Lambda(X) : x \in \ell\}$$
l'ensemble des droites presque contenues dans X qui passent par x.

Définition 3.5. Un point $x \in G$ est *n-interne* à X si $RM(\Lambda_x(X)) \geq n - RM(B)$; l'ensemble des points n-internes à X est la *n-clôture* de X, notée $\overline{X}^n$.

Comme les droites de $\Lambda_x(X)$ ne s'intersectent qu'en x et sont génériquement contenues dans X, on a pour $x \in \overline{X}^n$ que
$$RM(X) \geq RM(\bigcup \Lambda_x(X)) = RM(\Lambda_x(X)) + RM(B) \geq n.$$
En particulier, si $RM(X) < n$ alors $\overline{X}^n = \emptyset$, et si $\overline{X}^n \neq \emptyset$ pour un entier n, alors $RM(X) \geq RM(B)$.

Lemme 3.6. *Si $RM(X \triangle Y) < n$, alors $\overline{X}^n = \overline{Y}^n$.*

Démonstration. Soit $x \in \overline{X}^n \setminus \overline{Y}^n$. Alors

$$\bigcup_{\ell \in \Lambda_x(X)} (\ell \cap X) \setminus Y \subseteq X \setminus Y$$

est de rang de Morley au moins $n - RM(B) + RM(B) = n$, une contradiction. □

Lemme 3.7. *Pour une partie X de G et $RM(B) \le n \le RM(X)$ on a*

$$RM(\overline{X}^n) + n \le RM(\Lambda(X)) + 2\,RM(B) \le \max_n \{RM(X \cap \overline{X}^n) + n\}.$$

Démonstration. Considérons $Z = \{(x, \ell) \in G \times \Lambda(X) : x \in \ell\}$ et $Z' = \{(x, \ell) \in Z : x \in X\}$. Alors

$$\begin{aligned} RM(Z) &= RM(\Lambda(X)) + RM(B) = RM(Z'), \qquad \text{et} \\ RM(Z) &= \max_{RM(B) \le n \le RM(X)} \{RM(\overline{X}^n \setminus \overline{X}^{n+1}) + n - RM(B)\}, \\ RM(Z') &= \max_{RM(B) \le n \le RM(X)} \{RM((\overline{X}^n \setminus \overline{X}^{n+1}) \cap X) + n - RM(B)\}. \end{aligned}$$

Le lemme en découle. □

Lemme 3.8. *Soit X une partie de G de rang de Morley n. Alors $RM(\Lambda(X)) = 2n - 2\,RM(B)$ si et seulement si $RM(\overline{X}^n) = n$. Dans ce cas, si X est de degré de Morley 1, alors $\Lambda(X)$ et $\overline{X}^n$ le sont aussi, et $RM(X \triangle \overline{X}^n) < n$.*

Démonstration. Si $RM(\Lambda(X)) = 2n - 2\,RM(B)$, l'ensemble

$$\{(x, y) \in X^2 : \ell(x, y) \in \Lambda(X)\}$$

est générique dans X^2. Ainsi pour x, y génériques indépendants de X on a $y \in \Lambda_x(X)$, d'où $RM(\Lambda_x(X)) \ge n - RM(B)$ et $x \in \overline{X}^n$. Donc

$$RM(\overline{X}^n) \ge RM(X \cap \overline{X}^n) \ge n.$$

L'autre direction découle du lemme 3.7.

Si de plus X est de degré de Morley 1, une droite générique de $\Lambda(X)$ est de la forme $\ell(x, y)$ pour x, y génériques indépéndants de X. Donc $\Lambda(X)$ est de degré de Morley 1, ainsi que l'ensemble Z de la démonstration du lemme 3.7, et aussi $\overline{X}^n$. Mais $RM(X \cap \overline{X}^n) = n$, d'où $RM(X \triangle \overline{X}^n) < n$. □

Définition 3.9. Une partie $X \ne \emptyset$ de G est un *n-ensemble de Frécon* si $X \subseteq \overline{X}^n$. Si en plus $n = RM(X)$ et $X = \overline{X}^n$ est de degré de Morley 1, nous appelons X un *ensemble de Frécon.*

Notons que tout ensemble quasi-convexe infini est un ensemble de Frécon.

Lemme 3.10. *Si X est une partie de G avec $RM(\overline{X}^n) = RM(X) = n$, il y a un ensemble de Frécon de rang n génériquement inclus dans X.*

Démonstration. Soit X la réunion disjointe de parties définissables X_i de rang de Morley n et degré de Morley 1. Comme les droites sont de degré de Morley 1, on a $\Lambda(X) = \bigcup_i \Lambda(X_i)$, encore une réunion disjointe. Puisque $RM(\overline{X}^n) = n$ on a $RM(\Lambda(X)) = 2n - 2\,RM(B)$, et il y a i tel que $RM(\Lambda(X_i)) = 2n - 2\,RM(B)$. Alors $RM(\overline{X}_i^n) = n$ et $DM(\overline{X}_i^n) = 1$. De plus, $RM(X_i \triangle \overline{X}_i^n) < n$, d'où $\overline{X}_i^n = \overline{\overline{X}_i^n}^n$, et $\overline{X}_i^n$ est un ensemble de Frécon génériquement inclus dans X. □

Lemme 3.11. *Soit X un ensemble de Frécon avec $1 \in X$. Alors $X = X^{-1}$, et pour tout $x \in X$ on a $xX = Xx^{-1}$.*

Démonstration. X^{-1} est encore un ensemble de Frécon. Comme $\Lambda_1(X)$ consiste de borels, on a $\Lambda_1(X) = \Lambda_1(X^{-1})$. Or, $RM(\bigcup \Lambda_1(X)) = RM(X)$ et

$$RM(\bigcup \Lambda_1(X) \setminus X) < RM(\Lambda_1(X)) + RM(B) = RM(X) \ ;$$

comme X est de degré de Morley 1 on a

$$RM(X \triangle \bigcup \Lambda_1(X)) < RM(X) = RM(\bigcup \Lambda_1(X))$$

et d'après le lemme 3.6 on a

$$X = \overline{X}^n = \overline{\bigcup \Lambda_1(X)}^n = \overline{\bigcup \Lambda_1(X^{-1})}^n = \overline{X^{-1}}^n = X^{-1}.$$

Pour $x \in X$ le translaté Xx^{-1} est encore un ensemble de Frécon contenant 1. Donc

$$Xx^{-1} = (Xx^{-1})^{-1} = xX^{-1} = xX. \quad \square$$

Théorème 3.12. *Soit G un groupe malsain. Alors un ensemble de Frécon est un translaté d'un sous-groupe définissable contenant un borel. En particulier, il est convexe.*

Démonstration. Supposons, pour une contradiction, que X soit un ensemble de Frécon infini qui n'est pas un translaté d'un sous-groupe définissable contenant un borel. En translatant, on peut supposer que $1 \in X$. Soit G_0 le plus petit sous-groupe définissable contenant X. Alors G_0 contient génériquement une droite ℓ, et donc le borel $\ell\ell^{-1}$. Donc G_0 est connexe d'après le lemme 2.5, malsain, et X y est propre par hypothèse.

Soit $N = \{g \in G_0 : gX = X\}$ le stabilisateur à gauche de X ; comme $X = X^{-1}$, c'est également le stabilisateur à droite ; on a $N \subseteq X \subset G_0$. On considère le sous-groupe S de G_0^2 donné par

$$S = \{(x, y) \in G_0^2 : xXy^{-1} = X\}.$$

Alors la projection de S sur les deux coordonnées contient X, et doit être G_0 entier. De plus,

$$\{g \in G_0 : (g, 1) \in S\} = N = \{g \in G_0 : (1, g) \in S\}.$$

Comme $N \times \{1\}$ est normal dans S, la projection N sur la première coordonnée est normale dans la projection de S sur la première coordonnée, soit G_0. Ainsi S est le graphe d'un automorphisme σ de G_0/N tel que $\sigma(x) \equiv x^{-1} \mod N$ pour $x \in X$. En particulier σ^2 fixe X/N et donc G_0/N, et σ est un automorphisme involutif de G_0/N. Si G est malsain canonique, $G_0 = G$ et N est trivial, et on conclut avec la proposition 2.10. Sinon, on notera que l'ensemble des translatés bilatères de X dans G_0 est égal à l'ensemble des translatés à gauche, ou à droite.

Soit $H = N_{G_0}(X) = \{g \in G_0 : X^g = X\}$ le normalisateur de X dans G_0, et $g \in G_0$. Il y a $h \in G_0$ avec $X^g = Xh$; soit u la racine carrée de h modulo N. Comme $1 \in X^g$ on a $h \in X^{-1} = X$ et σ inverse h modulo N, et aussi u. Alors

$$X^g = Xh = Xu^2 = \sigma^{-1}(u)Xu = u^{-1}Xu = X^u,$$

et $gu^{-1} \in H$. Ainsi $G_0 = HX'$, où X' est l'ensemble des racines carrées des éléments de X. Notons que $\sigma(x) \equiv x \mod N$ si et seulement si $x \in H$, et σ inverse X' modulo N.

Soit $g \in G_0$ avec $\sigma(g) \equiv g^{-1} \mod N$, et choisissons $h \in H$ et $x \in X'$ avec $hx = g$. Alors

$$x^{-1}h^{-1} = g^{-1} \equiv \sigma(g) = \sigma(hx) = \sigma(h)\sigma(x) \equiv hx^{-1} \mod N.$$

Ainsi $h^{-x} \equiv h \mod N$ et $x^2 \in C_{G_0}(h/N)$. Comme G_0 n'a pas d'involutions, on obtient $x \in C_{G_0}(h/N)$ et $h \in N$. Donc NX' est l'ensemble des éléments de G_0 inversés par σ modulo N, qui est clos par carré et racine carrée. Si $x \in X'$ et $u \in NX'$ avec $u^2 = x$, alors $u = ny$ avec $n \in N$ et $y \in X'$, et

$$x = u^2 = (ny)^2 = nn^{y^{-1}}y^2 \in NX = X.$$

Ainsi $X' \subseteq X$; comme σ inverse X modulo N on a

$$NX' \subseteq NX = X \subseteq NX',$$

et $X = NX'$. En particulier $G_0 = HX$ implique $N < H$.

Soit B un borel presque contenu dans X. Pour x, y génériques indépendants de B on a

$$y^{-1}x^{-1} \equiv \sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y) \equiv x^{-1}y^{-1} \mod N$$

et B/N est abélien, inversé par σ. Ainsi B est contenu entièrement dans X ; comme ceci est vrai pour tout translate de xX avec $x \in X$, toute droite génériquement contenue dans X y est contenue, et X est convexe.

Soit $h \in H \setminus N$, et B un borel avec $h \in B$, et soit B^x un conjugué de B contenu dans X. Alors pour $y = x\sigma(x)$ on a

$$By = Bx\sigma(x) = xB^x\sigma(x) \subseteq xX\sigma(x) = X.$$

Ainsi $y \in X$ et $hy \in X$, d'où

$$h \equiv \sigma(h) = \sigma(hy)\sigma(y^{-1}) \equiv y^{-1}h^{-1}y = h^{-y} \mod N,$$

et $y^2 \in C_{G_0}(h/N)$. Ainsi $y \in C_{G_0}(h/N)$ et $h \in N$, ce qui est absurde. □

Corollaire 3.13. *Soit G un groupe malsain avec un borel B. Si X est une partie de G de rang $n > 0$ avec $RM(\overline{X}^n) = n$, alors X contient génériquement un translaté d'un sous-groupe connexe de rang n qui contient un borel.*

Démonstration. Il y a un ensemble de Frécon de rang n génériquement inclus dans X d'après le lemme 3.10, qui est égal à un translaté d'un sous-groupe connexe contenant un borel d'après le théorème 3.12. □

4. Commutateurs

Dans un mauvais groupe de rang trois, Frécon [4] trouve grâce aux commutateurs un ensemble de Frécon de dimension deux ; il en conclut ensuite que le groupe n'existe pas, par une méthode plus calculatoire que celle utilisée ici. Dans la section précédente, nous avons généralisé la deuxième partie de sa démonstration au-delà de toute attente, mais pas la première, si bien que nous ne savons pas si notre Théorème 3.12 permet de montrer d'autres résultats d'inexistence. Dans cette section, nous montrerons que pour un groupe malsain G avec borel B abélien, on obtient au moins un $2\,RM(B)$-ensemble de Frécon, ce qui fournit une contradiction si $RM(G) = 2\,RM(B) + 1$, et en particulier pour $RM(G) = 3$.

Théorème 4.1. *Soit G un groupe malsain avec borel B abélien. Alors il y a un $2\,RM(B)$-ensemble de Frécon de rang strictement inférieur à $RM(G)$.*

Démonstration. Soit $g \neq 1$ un commutateur non-trivial, et

$$X = \{x \in G : \exists y\ [x, y] = g\}.$$

Si $x \in X$ et $y \in G$ est tel que $[x, y] = g$, alors $[x, y'] = g$ pour tout $y' \in B(x)y$, et $xB(y') \subset X$. Ces droites sont toutes différentes : en effet, si $xB(y') = xB(y'')$ avec $y' \neq y''$ dans $B(x)$, alors $B(y') = B(y'')$ coupe $B(x)$ en deux points et lui est égal. Donc $g = [x, y'] = 1$, une contradiction.

Ainsi $X \subseteq \overline{X}^{2\,RM(B)}$, et $RM(X) \geq 2\,RM(B)$. Pour majorer le rang de X on considère l'application $f : (x, y) \mapsto [x, y]$. L'image est invariant par conjugaison ; s'il ne contient qu'un nombre fini de classes de conjugaison, alors un commutateur $[x, y]$ de deux éléments génériques indépendants serait conjugué à son inverse $[y, x]$, ce qui est impossible. Par conséquent $RM(\mathrm{im} f)$ est strictement plus grand que le rang $RM(G) - RM(B)$ d'une classe de conjugaison, et un commutateur générique g a une fibre $f^{-1}(g)$ de rang strictement inférieur à $2\,RM(G) - (RM(G) - RM(B)) = RM(G) + RM(B)$. On en conclut que $RM(X) < RM(G)$. □

Dans tout groupe malsain G on a $RM(G) > 2\,RM(B)$, car sinon pour $g \in G$ générique les deux double translatés BgB et $Bg^{-1}B$ seraient génériques, donc d'intersection non-vide, donc égaux, ce qui fournirait une involution. Si on fixe le rang du borel (abélien !), le corollaire suivant exclut donc le cas minimal.

Corollaire 4.2. *Il n'y a pas de groupe G malsain avec borel B abélien de rang $RM(G) = 2\,RM(B) + 1$. En particulier, il n'y a pas de mauvais groupe de rang* 3.

Démonstration. Dans un tel groupe, d'après le théorème 4.1 il y a un $2\,RM(B)$-ensemble de Frécon de rang $2\,RM(B)$; d'après le corollaire 3.13 il y a un sous-groupe définissable connexe H de rang $2\,RM(B)$ contenant un borel B'. Comme H est malsain de borel B', c'est absurde. □

Par contre, on n'obtient pas de contradiction si $RM(G) = 3\,RM(B)$, même pour $RM(G) = 6$ et $RM(B) = 2$: on aurait $RM(X) = 5$, et les classes de conjugaison de commutateurs formeraient une (toute petite !) famille de rang un. Quant à $RM(G) = 4$ et $RM(B) = 1$, ça voudrait dire aussi que $RM(X) = 3$, mais que toutes les classes de conjugaison sauf un nombre fini sont des commutateurs.

Références

[1] A. V. Borovik et B. P. Poizat. Simple groups of finite Morley rank without nonnilpotent connected subgroups, preprint deposited at VINITI, 1990.

[2] Gregory Cherlin. Groups of small Morley rank, Ann. Math. Logic, 17(1–2) :1–28, 1979.

[3] Luis Jaime Corredor. Bad groups of finite Morley rank, J. Symb. Logic, 54(3) :768–773, 1989.

[4] Olivier Frécon. Bad groups in the sense of Cherlin, *preprint.*

[5] Ali Nesin. Nonsolvable groups of Morley rank 3, J. Algebra, 124(1) :199–218, 1989.

Université de Lyon ; CNRS ; Université Claude Bernard Lyon 1 ; Institut Camille Jordan UMR5208, 43 bd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France

E-mail address: `poizat@math.univ-lyon1.fr`

E-mail address: `wagner@math.univ-lyon1.fr`